Kombinatoryczna teoria liczb   
  
Teoretyczny opis problemu

Anna Zawadzka  
Piotr Waszkiewicz  
Przemysław Rząd

18 listopada 2016

# Cel projektu

Projekt ma na celu zaimplementowanie gry w **rozdzielanie Szemerediego**, w której gracz mierzy się z komputerem. Dla wybranych na początku gry wartości liczb **N** i **k**, runda polega na:

* wyborze dwóch (dotąd niewybranych) liczb ze zbioru [N] przez gracza pierwszego
* Wyborze jednej ze wskazanych liczb przez gracza drugiego, która zostanie pokolorowana na jego kolor. Druga ze wskazanych liczb kolorowana jest na kolor gracza pierwszego

W rundach nieparzystych role się zamieniają. Wygrywa gracz, który pierwszy będzie miał k-elementowy ciąg arytmetyczny w swoim kolorze.

# Twierdzenie Szemerediego

W projekcie będziemy korzystać z twierdzenia Endre Szemerédiego, które brzmi następująco:

Dla dowolnej liczby 0<d<1 zwanej gęstością i dowolnej liczby naturalnej k istnieje liczba N(d,k) taka, że jeżeli N>N(d,k), to dowolny podzbiór A zbioru {1,...,N} o liczebności większej od dN zawiera ciąg arytmetyczny długości k.

# Sprawdzanie wygranej

Sprawdzenie ewentualnej wygranej gracza lub komputera będzie mogło być zrealizowane w prosty sposób algorytmem siłowym (sprawdzenie różnic między wszystkimi liczbami ze zbioru).

**Twierdzenie Szemerediego** zostanie wykorzystane do sprawdzenia, czy na pewno gra zostanie skończona czyjąś wygraną, na podstawie podanych wartości liczb **N** i **k**. W przypadku, gdy nie ma gwarancji na zakończenie gry, odpowiedni komunikat zostanie wyświetlony użytkownikowi.

Dla danych wartości **N** i **k** gra zawsze skończy się czyjąś wygraną, jeśli najliczniejszy podzbiór niezawierający żadnego ciągu arytmetycznego o długości **k** ma liczność mniejszą niż **N**/2.

Innymi słowy, dowolny podzbiór o liczności **N**/2 zawiera jakiś ciąg arytmetyczny długości **k**.

Czyli, korzystając z górnego oszacowania **N(k, d)**, stwierdzimy że gra zawsze skończy się wygraną, jeśli spełnione będzie:

**N >**



Gdzie **d** wynosi nie wiem, ale może N/2 – 1/N

# Strategie gry komputera

Gracz na początku gry ma możliwość wyboru poziomu gry (łatwy/trudny). W zależności od tego, stosowana jest odpowiednia strategia komputera.

## Strategia losowa

Komputer w swojej rundzie wybiera dwie liczby spośród jeszcze nie wybranych w sposób losowy.  
Mając do wyboru dwie liczby wybrane przez gracza, spośród nich wybiera jedną również w sposób losowy.

## Strategia zachłanna

Komputer w swojej rundzie pierwszą liczbę wybiera taką, która wydłuży najdłuższy posiadany ciąg arytmetyczny. W przypadku kilku możliwości (wydłużanych ciągów lub możliwych liczb wydłużających ciąg) wybierana jest dowolna z rozważanych liczb. Dodatkowo, komputer sprawdza czy w taki sposób wydłużając ciąg, pozostaną wśród niewybranych liczby, które mogą posłużyć w kolejnych rundach do wydłużenia ciągu do długości **k**.   
Druga liczba, a także jedna z dwóch liczb w przypadku rundy gracza, wybierana jest w taki sam sposób.